



## Вступительная олимпиада 2 июля

1. В турнире по настольному теннису участвовали 10 мальчиков и 6 девочек. Каждый участник сыграл с каждым по одному разу и одержал хотя бы одну победу. По итогам турнира оказалось, что все мальчики одержали разное количество побед, а все девочки – одинаковое. Победителями считаются те, кто одержали наибольшее число побед. Могли ли девочки победить в турнире? Ничьих в теннисе не бывает.
2. Внутри (не на границе) прямоугольника  $7 \times 12$  выбрали 8 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них меньше 5.
3. На острове используются 45 языков, причем каждый житель знает по крайней мере пять из них. Известно, что любые два жителя могут вести между собой беседу, возможно при посредничестве нескольких переводчиков. Докажите, что тогда любые два островитянина смогут поговорить между собой, пользуясь услугами не более чем 15 переводчиков.
4. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\Gamma$  с центром в точке  $O$ . Его диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны и пересекаются в точке  $P$ , причём точка  $O$  лежит внутри треугольника  $BPC$ . На отрезке  $BO$  выбрана точка  $H$  так, что  $\angle BHP = 90^\circ$ . Окружность  $\omega$ , описанная около треугольника  $PHD$ , вторично пересекает отрезок  $PC$  в точке  $Q$ . Докажите, что  $AP = CQ$ .
5. Конечно или бесконечно множество таких натуральных  $n$ , что число  $(n!)^n + 1$  делится нацело на  $n + 2025$ ?
6. В олимпиаде из 4 этапов участвует  $n$  школьников. Все участвуют в первом этапе, а во втором, третьем и четвёртом этапах –  $a, b, c$  участников соответственно. Поскольку участник очередного этапа должен быть участником и предыдущего, то должны выполняться неравенства  $n \geq a \geq b \geq c \geq 0$ . Кроме того, жюри хочет, чтобы во втором и в третьем туре вышло поровну участников (т.е.  $a - b = b - c$ ). Докажите, что жюри может выбрать участников на все этапы олимпиады ровно  $C_{2n}^n$  способами. Способы считаются различными, если они отличаются составом участников хотя бы на одном этапе.



## Вступительная олимпиада 2 июля

1. В турнире по настольному теннису участвовали 10 мальчиков и 6 девочек. Каждый участник сыграл с каждым по одному разу и одержал хотя бы одну победу. По итогам турнира оказалось, что все мальчики одержали разное количество побед, а все девочки – одинаковое. Победителями считаются те, кто одержали наибольшее число побед. Могли ли девочки победить в турнире? Ничьих в теннисе не бывает.
2. Внутри (не на границе) прямоугольника  $7 \times 12$  выбрали 8 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них меньше 5.
3. На острове используются 45 языков, причем каждый житель знает по крайней мере пять из них. Известно, что любые два жителя могут вести между собой беседу, возможно при посредничестве нескольких переводчиков. Докажите, что тогда любые два островитянина смогут поговорить между собой, пользуясь услугами не более чем 15 переводчиков.
4. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\Gamma$  с центром в точке  $O$ . Его диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны и пересекаются в точке  $P$ , причём точка  $O$  лежит внутри треугольника  $BPC$ . На отрезке  $BO$  выбрана точка  $H$  так, что  $\angle BHP = 90^\circ$ . Окружность  $\omega$ , описанная около треугольника  $PHD$ , вторично пересекает отрезок  $PC$  в точке  $Q$ . Докажите, что  $AP = CQ$ .
5. Конечно или бесконечно множество таких натуральных  $n$ , что число  $(n!)^n + 1$  делится нацело на  $n + 2025$ ?
6. В олимпиаде из 4 этапов участвует  $n$  школьников. Все участвуют в первом этапе, а во втором, третьем и четвёртом этапах –  $a, b, c$  участников соответственно. Поскольку участник очередного этапа должен быть участником и предыдущего, то должны выполняться неравенства  $n \geq a \geq b \geq c \geq 0$ . Кроме того, жюри хочет, чтобы во втором и в третьем туре вышло поровну участников (т.е.  $a - b = b - c$ ). Докажите, что жюри может выбрать участников на все этапы олимпиады ровно  $C_{2n}^n$  способами. Способы считаются различными, если они отличаются составом участников хотя бы на одном этапе.